

## 第7章 定積分の応用

(キーワード)

線積分、面積分、体積積分、立体角、重心、慣性モーメント

定積分の応用として、曲線の長さ、曲面の表面積、立体の体積、空間に分布した物理量の曲線、曲面、および体積についての積分、および物理学への応用として重心、慣性モーメントの計算法を検討する。

### 7.1 曲線の弧の長さ

図 7.1(a)のように関数  $y = f(x)$  を  $x-y$  平面上にプロットして曲線を描く。 $x = a$  から  $x = b$  までの曲線の長さを求める問題を考える。区間  $[a, b]$  を等間隔に分割し、分割幅を  $\Delta x$  とする。これらの分割された区間は  $x$  座標  $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$  で区切られるとする。このよ

うに曲線を分割したとき、各区間の弧の長さは  $\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$  で近似される。したがって、弧の全長はこれらの和で近似され、

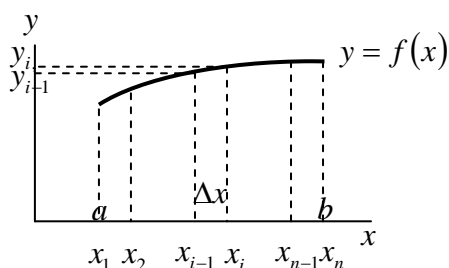


図7.1(a) 弧の長さの和  
(x-y)表示

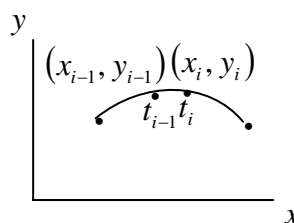


図7.1(b) 弧の長さの和  
t 表示

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{\Delta x^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x}\right)^2} \Delta x$$

と書ける。ここで、分割を細かくして  $\Delta x \rightarrow 0$  の極限をとれば、弧の長さ  $s$  は

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2} dx \quad (7.1)$$

として求めることができる。定積分は分割と総和であることを思い出して欲しい。

次に、曲線がパラメータ  $t$  などにより  $x$  座標と  $y$  座標を別々に指定することで表される場合について、曲線の長さを与える式を導く。図 7.1(b)に示すように、ここで、曲線は

$$\begin{aligned}x &= x(t) \\ y &= y(t)\end{aligned}\tag{7.2}$$

で与えられるとする。パラメータは  $t = \alpha$  から  $t = \beta$  まで変化するとし、この区間を  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$  により分割する。分割幅は  $\Delta t$  で均一とする。このとき、 $\Delta t$  に対応した  $x$  と  $y$  の増分  $\Delta x$  と  $\Delta y$  はもはや均一ではなく場所場所で異なる値をとる。曲線をパラメータの分割に対応した折れ線で近似すれば、弧の長さは近似的に

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{\left(\frac{x_i - x_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}\right)^2 + \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}\right)^2} (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \Delta t$$

と書けるので  $\Delta t \rightarrow 0$  の極限において、弧の長さは

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt\tag{7.3}$$

として求められる。

特に、曲線が極座標で表されているなら、 $x$  と  $y$  は動径  $r$  と偏角  $\theta$  で表されるが、曲線上では  $r$  は  $\theta$  の関数として与えられるので結局独立に変化するパラメータは  $\theta$  である。この  $\theta$  を上述の  $t$  の代わりに用い、

$$x = r \cos \theta \quad \text{および} \quad y = r \sin \theta \quad \text{から、}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \sin \theta \quad \text{および} \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \sin \theta + r \cos \theta \quad \text{であるので、}$$

$$s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} d\theta\tag{7.4}$$

が得られる。

**例 1**  $y = x^2$  の曲線の長さを  $x = 0$  から  $x = 1$  まで求めてみよう。(7.3) 式より、

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{1 + t^2} dt$$

ここで、 $t = 2x$  のように変数を置換した  
この積分を実行すると

$$s = \frac{1}{4} \left( t \sqrt{1 + t^2} + \log \left( t + \sqrt{1 + t^2} \right) \right) \Big|_0^2 = \frac{2\sqrt{5} + \log(2 + \sqrt{5})}{4}$$

となる。

**例2** 半径  $a$  の円周長を (7.4) 式を用いて計算する。この円周上では  $r = a$  で  $\theta$  に依存しないで一定なので、 $\frac{dr}{d\theta} = 0$  であり、

$$s = \int_0^{2\pi} r d\theta = \int_0^{2\pi} a d\theta = a\theta \Big|_0^{2\pi} = 2\pi a \quad \text{となる。}$$

**例3** 極座標表示の対数螺旋、 $r = ce^{\alpha\theta}$  について、 $\theta = 0$  から  $\theta = 2\pi$  までの弧の長さを求める。

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} ce^{\alpha\theta} \sqrt{1 + \alpha^2} d\theta = \frac{c\sqrt{1 + \alpha^2}}{\alpha} e^{\alpha\theta} \Big|_0^{2\pi} = \frac{c\sqrt{1 + \alpha^2}}{\alpha} (e^{2\pi\alpha} - 1)$$

**例4** アルキメデスの螺旋  $r = c\theta$  ( $c$  は正の定数) 上の弧長を  $\theta = 0$  から  $\theta = \theta_0$  まで求める。

$$s = \int_0^{\theta_0} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_0^{\theta_0} c\sqrt{1 + \theta^2} d\theta = \frac{c}{2} \left( \theta_0 \sqrt{1 + \theta_0^2} + \log \left( \theta_0 + \sqrt{1 + \theta_0^2} \right) \right)$$

## 7.2 線積分

次に、 $x-y$  平面上に曲線が与えられているとし、この曲線上の各位置で関数が定義されているとする。この関数を  $z = f(x, y)$  とし、次の計算を考える。

$$I = \sum_i f(x_i, y_i) \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} = \sum_i f(x_i, y_i) \Delta s_i \quad (7.5)$$

この和は曲線を微小な長さ  $\Delta s_i$  に分割し、この微小長さに各地点における関数値を掛けて総和を取ったものである (図 7.2 参照)。ここで分割を無限に細かくし、分割数  $N$  を無限に大きくするとき、この総和が有限な値に一樣に収束するならば、この総和を次の様に表し、関数  $f(x, y)$  の曲線  $l$  に沿っての積分、あるいは  $f(x, y)$  の曲線  $l$  上での線積分という。

$$I = \sum_{\substack{\Delta s_i \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} f(x_i, y_i) \Delta s_i = \int_{\ell} f(x, y) ds \quad (7.6)$$

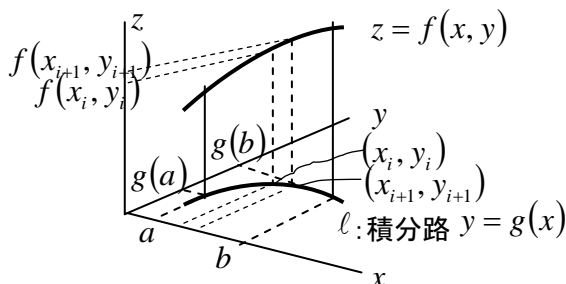


図7.2 線積分の説明図

この計算において、 $(x, y)$ は積分路  $l$  上の点であることを注意する。したがって、 $y_i$  および  $y$  は積分路  $l$  を与えるために  $y = g(x)$  として  $x$  の関数として表されていないなければならない。この線積分は関数値  $z = f(x, y)$  を  $x-y$  平面に対して垂直な  $z$  軸方向での値としてプロットしてみるとわかりやすい。図 7.2 に示すように、積分路  $l$  上に高さが  $f(x, y)$  の曲線が形成され、積分 (7.6) はこの曲線と積分路との間にできる曲面 (垂直に下がるカーテンのようなもの) の面積を与える。線積分は (7.6) 式のようにシンボリックに表されるが、具体的に計算しようとする場合、より具体的な形式に書き表したほうが良い。このような観点から、まず式 (7.6) 式を、独立変数としての  $x$  および従属変数としての  $y$  で表す。

$$\begin{aligned}
 I &= \sum_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ i \rightarrow \infty}} f(x_i, y_i) \Delta s = \sum_{(x_{i+1} - x_i) \rightarrow 0} f(x_i, y_i) \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} \\
 &= \sum_{(x_{i+1} - x_i) \rightarrow 0} f(x_i, y_i) \sqrt{1 + \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}\right)^2} (x_{i+1} - x_i) = \sum_i f(x_i, y_i) \sqrt{1 + \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right)^2} \Delta x \\
 &= \int_{x_0}^{x_1} f(x, y) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx
 \end{aligned} \tag{7.7}$$

ここで、 $x_{i+1} - x_i = \Delta x$  とした。この計算に於いては積分路を与える関係式  $y = g(x)$  を  $y$  に代入するので、被積分関数は結局  $x$  だけの関数となり、通常の定積分に帰着される。

次に、 $x-y$  平面上の座標  $x$  と  $y$  がパラメータ  $t$  の関数として与えられるとする。このパラメータを  $t_0$  から  $t_1$  の区間で  $t$  について等間隔  $\Delta t$  で分割する。このとき、(7.6) 式は次のように書き直される。

$$\begin{aligned}
 I &= \sum_i f(x_i, y_i) \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} \\
 &= \sum_i f(x_i, y_i) \sqrt{\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t_i}\right)^2 + \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta t_i}\right)^2} \Delta t_i = \int_{t_0}^{t_1} f(x, y) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \tag{7.8}
 \end{aligned}$$

ただし、 $x$  および  $y$  は  $x = x(t)$  および  $y = y(t)$  として  $t$  で与えられ、これらは積分路を表す。  
 特に、 $x-y$  平面上の位置が極座標で与えられているならば、 $x, y$  を  $r, \theta$  で表し、 $r$  を  $\theta$  の関数と考えて (7.8) 式の微分係数を求め代入することで (7.8) 式が次のように表される。

$$I = \int_{\theta_0}^{\theta_1} f(r, \theta) \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} d\theta \quad (7.9)$$

ただし、 $r = r(\theta)$  は積分路上の点までの動径長を偏角  $\theta$  の関数で与えるもので、積分路の極座標表示である。この式は簡単な図形的理解から直接求めることができる。図 7.3 に示すように、 $(x_i, y_i)$  点から  $(x_{i+1}, y_{i+1})$  点までの間の弧の長さを  $\Delta s_i$  とする。 $(x_i, y_i)$  点および

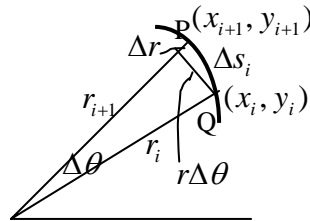


図7.3 曲線長の見積もり  
(極座標)

$(x_{i+1}, y_{i+1})$  点までの動径の長さをそれぞれ  $r_i$  および  $r_{i+1}$  とすると  $r_{i+1} - r_i = \Delta r = \frac{\partial r}{\partial \theta} \Delta \theta$  である。したがって、

$$\text{弧 } PQ = \sqrt{(r\Delta\theta)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \Delta\theta\right)^2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2} \Delta\theta$$

$$\text{であるから、} I = \sum_i f(r_i, \theta_i) \sqrt{r_i^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)_{r=r_i}^2} \Delta\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} f(r, \theta) \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2} d\theta \quad (7.10)$$

となる。

それでは、具体的に関数の線積分を求める作業を行う。

**例 5**  $z = f(x, y) = x^2 + y^2$  (回転放物面) を積分路  $y = 2x + 1$  に沿って積分する。積分は点  $(0, 1)$  から  $(1, 3)$  までとする。この場合は、(7.7) 式を  $x$  について区間  $0 \leq x \leq 1$  で積分することで求められる。

$$I = \int_{\ell} z ds = \int_0^1 (x^2 + y^2) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^1 (x^2 + (2x+1)^2) \sqrt{1 + \left\{\frac{d}{dx}(2x+1)\right\}^2} dx = \frac{14\sqrt{5}}{3}$$

**例 6**  $z = f(x, y) = x + y$  (原点を通る傾いた平面) を積分路  $y = \frac{1}{2}x$  に沿って  $x=0$  から  $x=1$  まで線積分する。

$$I = \int_0^1 (x + y) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2}x\right) \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} dx = \frac{3\sqrt{5}}{4} \int_0^1 x dx = \frac{3\sqrt{5}}{8}$$

これを極座表で求める。原点から点  $(x, y)$  までの距離を  $r$  とすると  $x = \frac{2}{\sqrt{5}}r$  および  $y = \frac{1}{\sqrt{5}}r$  であるから、

$$\begin{aligned} I &= \int_{\ell} f(x, y) ds = \int_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \left(\frac{2}{\sqrt{5}}r + \frac{1}{\sqrt{5}}r\right) dr = \int_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \frac{3}{\sqrt{5}} r dr \\ &= \frac{3}{\sqrt{5}} \int_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} r dr = \frac{3}{\sqrt{5}} \frac{r^2}{2} \Big|_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{3\sqrt{5}}{8} \end{aligned}$$

と同じ結果が得られる。ここでは偏角  $\theta$  が一定なので、線積分は  $r$  について行う。

**例 7**  $z = x^2 + xy + y^2$  (放物面;  $z = \text{const}$  面との交線が楕円で、 $x$  軸から  $-45^\circ$  の方向へ長軸を持つ) を半径  $R$  の円周  $x^2 + y^2 = R^2$  上で  $y \geq 0$  の領域で線積分する。まず、 $x-y$  座標系では次のようになる。

$$I = \int_{\ell} z ds = \int_{-R}^R (x^2 + xy + y^2) \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx ; \text{ここで、} y = \sqrt{R^2 - x^2} \text{ を代入する。}$$

$$\begin{aligned}
&= R \int_{-R}^R \left( x^2 + x\sqrt{R^2 - x^2} + (R^2 - x^2) \right) \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx \\
&= R \int_{-R}^R \left( \frac{x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} + x + \sqrt{R^2 - x^2} \right) dx = R \left[ \int_{-R}^R x \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx + \frac{\pi R^2}{2} \right] \\
&= R \left[ \frac{\pi R^2}{2} - \int_{-R}^R x (\sqrt{R^2 - x^2})' dx \right] = R \left[ \frac{\pi R^2}{2} - x (\sqrt{R^2 - x^2}) \Big|_{-R}^R + \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx \right] \\
&= \pi R^3
\end{aligned}$$

これを極座標で計算すると、 $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  で  $r = R$  とし、 $\frac{\partial r}{\partial \theta} = 0$  であることを用いると、

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\ell} z ds = \int_0^{\pi} \left( (R \cos \theta)^2 + R^2 \cos \theta \sin \theta + (R \sin \theta)^2 \right) \sqrt{R^2 + 0} d\theta \\
&= R^3 \int_0^{\pi} (1 + \cos \theta \sin \theta) d\theta = R^3 \left[ \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\pi} = \pi R^3
\end{aligned}$$

となり、同じ結果を得る。

### 例 8

線積分の応用として物体に働く力が行う仕事を計算してみよう。物体に力  $\mathbf{F}$  が働いていて変位  $\Delta \mathbf{r}$  が生じたとする、このとき、力が行った仕事は  $\mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}$  で与えられる。鉛直下方に重力  $-mg$  が働いているとき、放物運動している物体にたいして重力が行う仕事を考える。

物体を水平方向 ( $x$  軸とする) に速度  $v_0$  で発射したとすると、 $t$  秒後における物体の位置は

$$\left( v_0 t, -\frac{1}{2} g t^2 \right)$$

であり、 $x, y$  の関係として表せば、軌道は  $y = -\frac{g}{2v_0^2} x^2$  である。力は

$\mathbf{F} = (0, -mg)$  であり、軌道上の位置  $(x, y)$  から軌道に沿って  $(x + \Delta x, y + \Delta y)$  まで移動する際に、この力が行う仕事は  $dW = \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} ds$  である。ここで  $\mathbf{t}$  は軌道上の位置  $(x, y)$  における接線

ベクトルである。  $ds = \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} dx$  であり、また接線ベクトルを成分で表すと

$$t = \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}, \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \right) = \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{g^2}{v_0^4} x^2}}, \frac{-\frac{g}{v_0^2} x}{\sqrt{1 + \frac{g^2}{v_0^4} x^2}} \right) ; \frac{dy}{dx} = -\frac{g}{v_0^2} x \quad \text{を用いた。}$$

したがって、

$$dW = \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} ds = (-mg) \frac{-\frac{g}{v_0^2} x}{\sqrt{1 + \frac{g^2}{v_0^4} x^2}} ds \quad \text{となるので、重力がこの物体に行う仕事は、これを}$$

軌道に沿って線積分することで求められる。つまり、軌道上で原点から  $(x, y)$  までの積分は

$$\begin{aligned} W &= \int_{\ell} \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} ds = \int_{\ell} \frac{\frac{mg^2}{v_0^2} x}{\sqrt{1 + \frac{g^2}{v_0^4} x^2}} ds = \int_0^x \frac{\frac{mg^2}{v_0^2} x}{\sqrt{1 + \frac{g^2}{v_0^4} x^2}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ &= \int_0^x \frac{\frac{mg^2}{v_0^2} x}{\sqrt{1 + \frac{g^2}{v_0^4} x^2}} \sqrt{1 + \frac{g^2}{v_0^4} x^2} dx = \int_0^x \frac{mg^2}{v_0^2} x dx = \frac{mg^2}{2v_0^2} x^2 \end{aligned}$$

となる。ところで物体が落下することによる高さの変化は  $h = \frac{g}{2v_0^2} x^2$  なので上記の積分は

$mgh$  となり、結局重力が物体に対して行った仕事は

$$mgh \equiv \text{重力} \times \text{落ちた距離}$$

という馴染みのある結果を得る。

**例 9.** 極座標を用いた線積分の例として、半径  $a$  の円周上で与えられる関数  $f(r, \theta) = c\theta$  の

円周に沿った線積分を考える。  $r = a$  および  $\frac{dr}{d\theta} = 0$  より、

$$I = \int_0^{2\pi} f(r, \theta) \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} c\theta \sqrt{(a)^2} d\theta = ca \int_0^{2\pi} \theta d\theta = ca \frac{(2\pi)^2}{2} = 2\pi^2 ac$$

これは螺旋状スロープ階段の側面の面積を与える。

### 7.3 立体の体積の計算

図 7.4 に示すように、立体の断面積が  $x$  座標の関数であたえられるときは、立体の体積を



求めることは難しくない。x座標を $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$ と分割し各区間の間隔を $\Delta x$ 、各々の

位置における立体の断面積をそれぞれ $S(x_i)$ とすれば、立体の体積は近似的に

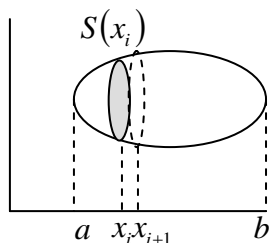


図7.4 断面積がxの関数で与えら得る場合

$$V \approx \sum_{i=1}^n S(x_i) \Delta x \quad (7.11)$$

と表される。ここで分割を細かくし、 $\Delta x \rightarrow 0$ の極限においては、体積は

$$V = \int_a^b S(x) dx \quad (7.12)$$

で与えられる。ただし、ここで立体の体積を $x=a$ から $x=b$ まで求めるものとする。

**例 10** 半径 $a$ の球の体積を求めてみる。球の中心を原点におき、 $x$ における断面の半径を $r$ とすれば、 $r^2 = a^2 - x^2$ であり、断面積は

$$\pi r^2 = \pi(a^2 - x^2)$$

である。したがって体積は

$$\int_{-a}^a \pi(a^2 - x^2) dx = \pi \left( a^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-a}^a = \frac{4\pi a^3}{3}$$

となる。

### 例 11

底面が長方形の角錐の体積を求めてみよう。頂点を原点に置いて、角錐の中心軸を $x$ 軸にとり、角錐の高さを $h$ とする。底面のサイズを $y$ 方向に $a$ 、 $z$ 方向に $b$ とする。このとき、 $x$ の位置での断面積は

$$\left( \frac{x}{h} a \right) \left( \frac{x}{h} b \right) = \frac{ab}{h^2} x^2$$

であるので、体積は

$$V = \int_0^h \frac{ab}{h^2} x^2 dx = \frac{ab}{3h^2} x^3 \Big|_0^h = \frac{ab}{3h^2} h^3 = \frac{abh}{3}$$

である。

#### 7.4 回転体の表面積

図 7.5 に示すように関数  $y = f(x)$  を  $x$  軸回りに回転して形成される回転体について、 $x = a$  から  $x = b$  までの側面積を求める。 $x_{i-1}$  と  $x_i$  に対応する  $y$  座標の値をそれぞれ  $y_{i-1}$  および  $y_i$  とする。図の  $M_{i-1}$  と  $M_i$  の距離を  $\Delta s_i$  とすると、

$$\Delta s_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

である。この距離は  $x_i$  の位置に応じて変化することに注意する。したがって  $i$  番目ということとで  $\Delta s_i$  と書いた。側面を描く曲線を折れ線で近似したときの、この回転体の側面積は

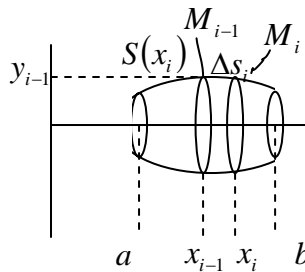


図7.5 回転体の表面積

$$\sum_i 2\pi y_{i-1} \Delta s_i = \sum_i 2\pi y_{i-1} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sum_i 2\pi y_{i-1} \sqrt{1 + \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right)^2} (x_i - x_{i-1})$$

と表すことができる。したがって、 $\Delta x = (x_i - x_{i-1}) \rightarrow 0$  の極限では表面積は

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2} dx \quad (7.13)$$

により求めることができる。

例 12  $y = \sqrt{x}$  で形成される回転体の表面積を  $x = 0$  から  $x = 1$  まで求めてみる。

$$\begin{aligned}
 S &= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2} dx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x + \frac{1}{4}} dx \\
 &= \frac{4\pi}{3} \left(x + \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{(\sqrt{5})^3 - 1}{8}\right)
 \end{aligned}$$

## 7.5 面積分

定積分の応用として次の積分を考える。

図 7.6 のように、 $x-y$  平面上に有限な領域  $S$  を与える。この領域において関数  $z = f(x, y)$  を定義する。ここで、 $S$  を多数の小面積  $\Delta S = \Delta x \Delta y$  に分割し、各々の小面積の所在地を座標  $(x_i, y_j)$  で指定する。この各々の位置における関数値を  $z_{i,j} = f(x_i, y_j)$  とし、次の和を考える。

$$S_n = \sum_{i,j} z_{i,j} \Delta S = \sum_{i,j} f(x_i, y_j) \Delta S \quad (7.14)$$

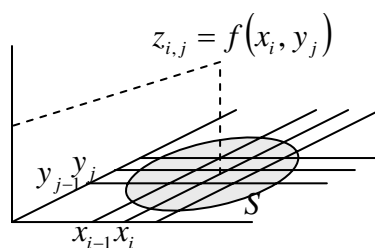


図7.6  $S$ 上の面積

ここで、 $n$  は分割の総数を意味する。ここで、 $n \rightarrow \infty$  とし、 $\Delta S \rightarrow 0$  の極限において、上記の  $S_n$  が有限の値に収束するとき、つまり

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = I \quad (7.15)$$

が一つ存在するならば、この極限值を関数  $z$  の面  $S$  上での面積分といい、記号

$$\iint_S z dS \quad (7.16)$$

で表す。これは、つまり積分領域を無数の小面積に分解し、各面積に関数値  $z$  を掛けて加え合わせるという作業を行うことである。このような計算では意味をしっかりと捉えることが何よりも重要である。

### 例 13

$S$  を区間  $-a \leq x \leq a$  と  $-b \leq y \leq b$  で囲まれる矩形の領域とし、 $z = h$  : 一定としたとき、 $z$  の  $S$  における積分は

$$\iint_S z dS = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j} f(x_i, y_j) \Delta S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j} h \Delta x \Delta y = h \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j} \Delta x \Delta y = 4abh$$

これはつまり、四角柱の体積に他ならない。この例でも明らかなように、関数  $z$  を面  $S$  について積分するということは  $z dS$  を面  $S$  内で加え合わせることに覚えるのが良い。

### 例 14

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

を  $x-y$  平面上で原点を中心とする半径  $a$  の円で囲まれる領域で積分する (図 7.7 参照)。この積分領域は半径  $a$  の球の  $x-y$  平面上での切り口である。  $z dS$  を考えるにあたって、まず

$y$  を固定し、 $x$  だけについて和を求める。つまり、 $z dx dy = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy$  を、 $y$  を固

定し、 $-\sqrt{a^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{a^2 - y^2}$  の範囲で  $x$  について加え合わせる、つまりに  $x$  について積分する。ここで、 $x$  の範囲がこのように限定されるのは、 $S$  は半径  $a$  の円で囲まれる領域だからである。

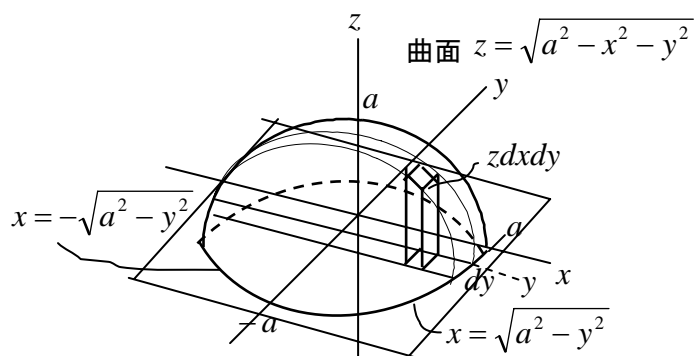


図7.7 半球の体積を面積分で求める

$$dy \int_{-\sqrt{a^2 - y^2}}^{\sqrt{a^2 - y^2}} z dx = dy \int_{-\sqrt{a^2 - y^2}}^{\sqrt{a^2 - y^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx = dy \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2} dx ; \alpha = \sqrt{a^2 - y^2} \quad \text{と置く}$$

$$= dy \alpha^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = dy \alpha^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos 2\theta + 1)}{2} d\theta = dy \frac{\pi}{2} \alpha^2 = dy \frac{\pi}{2} (a^2 - y^2)$$

最後の積分で、 $x = \alpha \sin \theta$  と変数を置換した。このとき積分領域  $-\alpha \leq x \leq \alpha$  は  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  に対応する。幾何学的に考えるならば、このようにして  $x$  について積分したものは、 $y$  のいろいろの位置において半球から切り出された厚さ  $dy$  のスライスの体積を与える。もちろん、その体積は  $y$  に依存する。その結果を  $y$  について  $-a \leq y \leq a$  の区間で積分すると

$$\int_{-a}^a \frac{\pi}{2} (a^2 - y^2) dy = \frac{1}{2} \frac{4\pi a^3}{3}$$

となり、半径  $a$  の球体の体積を半分にしたものになっている。

このように、関数  $z$  を面  $S$  について積分することは関数  $z$  と面  $S$  で形成される立体の体積になっているが、そもそも積分の定義は体積を意識したものではない。あくまでも関数値  $z$  と微小面積  $dS$  の積を全面積  $S$  について加えたものという基本概念を忘れないようにして欲しい。

次に、 $x-y$  平面上の領域  $S$  が極座標で表示されている場合の面積分を考える。面積分の基本的な考え方は、

$$S_n = \sum_{i,j} z_{i,j} \Delta S = \sum_{i,j} f(x_i, y_j) \Delta S \quad (7.17)$$

であるが、ここで  $\Delta S = \Delta x \Delta y$  および  $x_i$  と  $y_j$  をそれぞれ  $r$  と  $\theta$  で表すことである。 $x-y$  平面上の図形の面積を求めるためには、図形を  $\Delta S = \Delta x \Delta y$  の微小な矩形に分割してから総和を求めたが、極座標で同様の作業を行うためには、動径と偏角を微小幅に区切って微小面積を表し、これらの総和を取る。図 7.11(a) のように、原点を取り囲む閉曲線で与えられる領域の面積を考える。この曲線は動径  $r$  が

$$r = r(\theta) \quad (7.18)$$

として偏角  $\theta$  の関数であたえられるとする。この図形を角度幅  $\Delta\theta$  の細い扇状に区切る。偏角が  $\theta$  と  $\theta + \Delta\theta$  で作られる扇形に注目し、これの面積を求める。

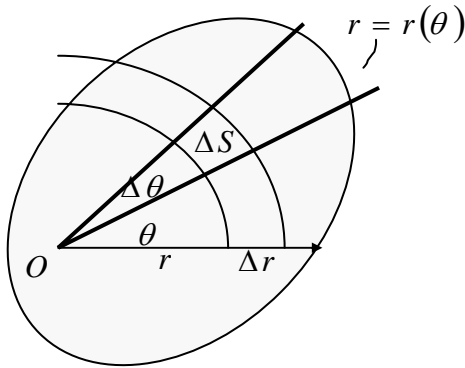


図6.11(a) 面積分の極座標表示  
積分領域が原点を含む場合

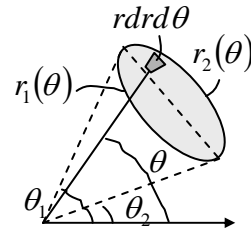


図6.11(b) 面積分の極座標表示  
積分領域が原点を含まない場合

この扇形を更に  $r$  方向の微小幅  $\Delta r$  で細かく区切る。原点から  $r$  および  $r + \Delta r$  の区間の面積は、2 辺の長さが  $r\Delta\theta$  および  $\Delta r$  の矩形で近似される。各微小区間の動径方向の幅は  $\Delta r$  と均一であるが、もう一辺  $r\Delta\theta$  は微小分割領域を形成する弧の長さなので、 $r$  と共に増大することに注意する。したがって、この扇形の面積は近似的に

$$\Delta S = \sum_i r_i \Delta\theta \Delta r = \Delta\theta \sum_i r_i \Delta r = \Delta\theta \int_0^r r dr = \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta \quad (7.19)$$

である。この結果は扇形を 2 等辺三角形で近似して直ちに得られる。ここで偏角  $\theta$  について加え合わせると全面積が得られる。

$$S = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta \quad (7.20)$$

ここで  $r$  は積分領域の外縁を表す  $\theta$  の関数である。

**例 15** アルキメデスの螺旋  $r = c\theta$  で囲まれる領域の面積を  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  の範囲で求める。  
(7.20) 式より、

$$S = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (c\theta)^2 d\theta = \frac{c^2}{6} \theta^3 \Big|_0^{2\pi} = \frac{4\pi^3 c^2}{3}$$

さらに、一般的に積分領域に原点を含まない場合、図 7.11(b) に示すように積分領域を 2 つの関数  $r_1(\theta)$  と  $r_2(\theta)$  で与え、偏角は  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$  という範囲にあるとする。このときの面積

は

$$S = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{r_1}^{r_2} r dr = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left( \frac{1}{2} r_2^2 - \frac{1}{2} r_1^2 \right) d\theta \quad (7.21)$$

で与えられる。

この面  $S$  上で関数  $f(r, \theta)$  が与えられているなら、

$$I = \iint_S f(r, \theta) r dr d\theta \quad (7.22)$$

は関数  $f(r, \theta)$  の面  $S$  上での面積分を極座標表示で与える。

**例 16**  $f(r, \theta) = e^{-r^2}$  (ガウス関数) を、原点を中心とする半径  $a$  の円形領域で面積分する場合、

$$I = \iint_S f(r, \theta) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a e^{-r^2} r dr = -2\pi \frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_0^a = \pi(1 - e^{-a^2}) \quad (7.23)$$

となる。

次に、積分領域が  $x-y$  面上の平らな面分ではなく、曲面上の有限な領域である場合の面積分について考える。身近な例として導体表面に分布している電荷の総量を求めるとか、曲面における電場の法線成分を曲面上で総和するとか、などである。以下、最も使用頻度の高い場合として、球面上での面積分を考える。まずは、図 7.12 を参考にして半径  $r$  の球面を経線と緯線で細かく分割し、球面上の  $(\theta, \varphi)$ 、 $(\theta, \varphi + \Delta\varphi)$ 、 $(\theta + \Delta\theta, \varphi)$  および  $(\theta + \Delta\theta, \varphi + \Delta\varphi)$  で張られる台形の面積  $dS$  を求める。  $\Delta\theta$  に対応する弧の長さは  $r\Delta\theta$  であるが、  $\Delta\varphi$  に対応した弧の長さは  $r \sin \theta \Delta\varphi$  であることに注意すること。同じ  $\Delta\varphi$  でも、異なる  $\theta$  の位置にある四辺形では  $\Delta\varphi$  に対応する弧の長さが異なるからである。

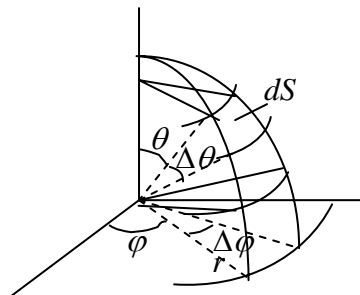


図7.12 球面上での微小面積

したがって、この四辺形の面積は

$$dS = (r\Delta\theta)(r\sin\theta\Delta\varphi) = r^2 \sin\theta\Delta\theta\Delta\varphi \quad (7.24)$$

であるのでこの球面上での領域  $S$  の面積は  $\theta$  と  $\varphi$  で積分することで

$$S = \iint_S r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \quad (7.25)$$

で与えられる。ただし積分を実行するときは、球面上の積分領域を与える  $\theta$  と  $\varphi$  の関係を考慮しなければならない。半径が 1 である球面上の領域  $S$  の面積は特別な意味を持ち、この面  $S$  が原点に対して張る立体角という。立体角の単位はステラジアンという。したがって、球面全体が原点に対して張る立体角は球面積が  $4\pi$  であることから  $4\pi$  ステラジアン (**strad**) である。

**例 17** 半径  $r$  の球面上で  $0 \leq \theta \leq \theta_0$  および  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  に対応するキャップの面積は

$$S = \iint_S r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = r^2 \int_0^{\theta_0} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi r^2 (1 - \cos\theta_0)$$

として求められる (図 7.13 参照)。

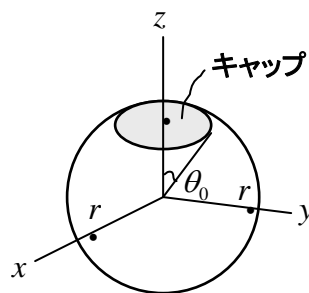


図7.13 球面上のキャップの面積

ここで、半径が 1 の球に適用すると、キャップが原点に対して張る立体角が得られる。上式で  $r=1$  とすれば 立体角  $d\Omega = 2\pi(1 - \cos\theta_0)$  ステラジアンである。



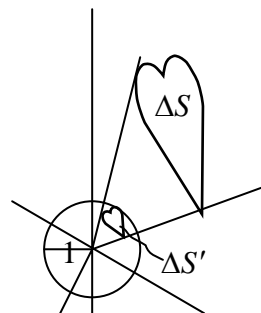


図7.14 曲面の単位球への射影

立体角はもっと一般的な意味を持つ。図 7.14 に示すように、部分曲面  $\Delta S$  に対応する単位球面上の  $\Delta S'$  の面積を、 $\Delta S$  が原点  $O$  に対して張る立体角という。

つぎに、簡単な例を挙げる。

**例 18** 原点から  $h$  の距離で  $z$  軸に垂直な平面があり、 $z$  軸との交点を中心とする半径  $a$  の円が原点に対して張る立体角を求める (図 7.15 参照)。まず、原点と半径  $a$  の円周を結ぶ直線で単位球面に円形のキャップが描かれることに注意する。この円盤が原点に対して張る

立体角はこのキャップの面積で与えられる。角度  $\theta_0$  は  $\cos \theta_0 = \frac{h}{\sqrt{h^2 + a^2}}$  であることから、

前述の例題 17 の結果を用いると、この円が張る立体角は

$$\Omega = \int_0^{\theta_0} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi(1 - \cos \theta_0) = 2\pi \left( 1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + a^2}} \right)$$

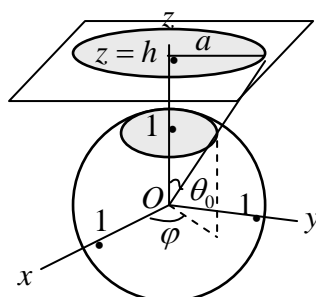


図7.15 平面上の円を単位球へ投影する

となる。ここで、円の半径  $a$  を無限に大きくすると、立体角は  $2\pi$  ステラジアンとなる。この場合、無限に広がる平面に対応する単位球上の面積は半球の面積  $2\pi$  なのでこの結果は納得できる。立体角の具体的な利用例としては、原点  $O$  から粒子ビームが放射状に放出されている場合、図 7.15 の半径  $a$  の円形領域を通過する粒子数を求める場合などである。粒子

ビームとしては、電子線、や光子などであり、円形領域は粒子線検出器の感度領域である。

ところで、曲面  $S$  上で関数  $f(r, \theta, \phi)$  : 球座標表示、または  $f(x, y, z)$  : カートesian座標表示、が与えられていて、この曲面上の領域  $S$  での総和

$$I = \sum_i f(r_i, \theta_i, \phi_i) \Delta S_i \quad (\text{球座標表示}) \quad (7.26)$$

$$I = \sum_i f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i \quad (\text{カーテシアン座標表示})$$

が一定の値に収束するなら、この和を関数  $f(r, \theta, \phi)$ 、あるいは  $f(x, y, z)$  の曲面  $S$  上での面積分という。これを

$$I = \iint_S f(r, \theta, \phi) dS, \quad I = \iint_S f(x, y, z) dS \quad (7.27)$$

と書くが、その意味はあくまでも (7.26) 式である。

面積分についてイメージを固めるために、身近な例に基づいて考察しよう。

**例 19** 半径  $R$  の球殻が半分水に沈んでいる場合に、この半球が水から受ける上向きの力を求める(図 7.16 参照)。

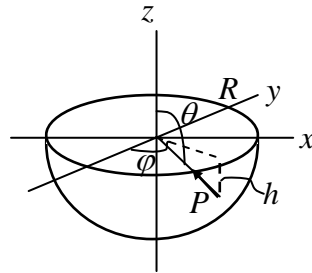


図7.16 水中に沈めた半球面が受ける圧力

まず、水面から深さ  $h$  での水圧を  $p$  とすると、 $p = \rho gh = \rho g R |\cos \theta|$  である。ここに、 $\rho$ 、 $g$  および  $\theta$  はそれぞれ水の密度、重力加速度、および圧力を求めている位置の方位角である。この関数が半球面上に分布していると考えて、水圧による力の上方成分の総和を計算する。深さ  $h$  における微小面積  $dS$  が水圧から受ける力は  $p dS$  である。この力の上方成分は  $-p \cos \theta dS$  なので、これを半球面で面積分することで水圧による力の上方成分の総和を求めることができる。(7.24)、(7.26)、(7.27) 式を用いて、

$$\begin{aligned}
 F &= \rho g R^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\cos\theta| (-\cos\theta \sin\theta) d\theta \quad \text{ここで、} |\cos\theta| = -\cos\theta \text{ なので} \\
 &= \rho g R^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left( \frac{\sin 2\theta \cos\theta}{2} \right) d\theta = \frac{\rho g R^3}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin\theta + \sin 3\theta) d\theta \\
 &= \frac{\rho g R^3}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi \left[ -\cos\theta - \frac{\cos 3\theta}{3} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\rho g R^3}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi \left( 1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{2\pi \rho g R^3}{3}
 \end{aligned}$$

となり、水に沈めた半球が上方へ受ける力はこの球殻が押しのけた水の重量と等しい。これは浮力と呼ばれる（アルキメデスの原理）。

問 例 19 で水に沈めた半球が水圧による力の水平方向成分の総和はゼロになることを示しなさい。

## 7.6 体積積分

次に、積分の領域を 3 次元の閉ざされた空間領域に拡張する。この空間領域を  $V$  と呼ぶ。この空間領域を多数のサイコロ状の微小立体  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$  に分解し、その各々の位置を  $(x_i, y_j, z_k)$  で与える。このとき、総和

$$I_n = \sum_{i,j,k} f(x_i, y_j, z_k) \Delta V \quad (7.28)$$

において、分割数  $n$  を  $\infty$  にし、 $\Delta V \rightarrow 0$  の極限において  $I_n \rightarrow I$  となる一つの極限值があるならば、これを関数  $f(x, y, z)$  の領域  $V$  についての**体積積分**（**3 重積分**）という。体積積分は次の記号で表す。

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \quad (7.29)$$

ここで、 $dV = dx dy dz$  を  $x-y-z$  座標系における**体積要素**と呼ばれる。

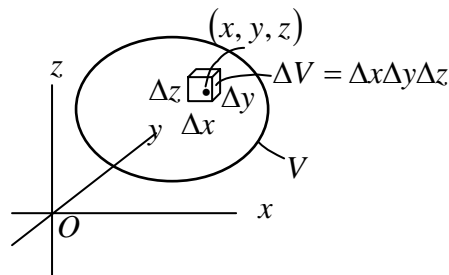


図7.17 体積積分

体積要素はどのような座標系かにより（カーテシアン座標、円柱座標、球座標など）、異なった表現を持つ。

$$\begin{aligned} dV &= dx dy dz && \text{カーテシアン座標} \\ dV &= r dr d\phi dz && \text{円柱座標} \\ dV &= r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi && \text{球座標} \end{aligned}$$

(7.30)

## 例 20

領域を  $0 \leq x \leq a$ 、 $0 \leq y \leq b$  および  $0 \leq z \leq c$  の直方体とし、 $f(x, y, z) = 1$  とすれば、

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta V \rightarrow 0}} \sum_{i,j,k} \Delta V = abc$$

となり、これは直方体である積分領域の体積に他ならない。また、 $f(x, y, z)$  が質量密度を表すなら、この積分は物体の全質量を与える。

## 例 21

$f(x, y, z) = x$  を例 20 と同じ領域で積分する。積分に当たって、微小体積の位置はいろいろな  $x$ 、 $y$  および  $z$  の値をとるが、関数の値は  $x$  だけに依存する。したがって、 $x$  座標についての和と  $y$  および  $z$  座標についての和を分けて行うことができ、

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dV &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta V \rightarrow 0}} \sum_{i,j,k} x \Delta V = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta V \rightarrow 0}} \sum_{i,j,k} x \Delta x \Delta y \Delta z = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_i x \Delta x \lim_{\Delta y \Delta z \rightarrow 0} \sum_{j,k} \Delta y \Delta z \\ &= \int_0^a x dx \iint_{S_x} dy dz = \int_0^a x dx \int_0^b dy \int_0^c dz = bc \int_0^a x dx = \frac{a^2 bc}{2} \end{aligned}$$

ところで、この値を体積  $abc$  で割ると、 $\frac{a}{2}$  を与える。これは、じつは質量密度が  $1 \text{ kg/m}^3$  の直方体について、**重心**（慣性中心）の  $x$  座標を求めたことになる。質量密度が  $\rho(x, y, z)$   $\text{kg/m}^3$  のように空間的に均一でない場合、重心の  $x$  座標は

$$x_c = \frac{\iiint_V x \rho(x, y, z) dV}{\iiint_V \rho(x, y, z) dV} = \frac{\iiint_V x \rho(x, y, z) dV}{M} \quad (7.31)$$

で与えられる。ここで、 $M$  は全質量である。同様に、重心の  $y$  および  $z$  座標も、

$$y_c = \frac{\iiint_V y \rho(x, y, z) dV}{M} \quad \text{および} \quad z_c = \frac{\iiint_V z \rho(x, y, z) dV}{M} \quad (7.32)$$

のようにして求める。これらの 3 成分をまとめて記述するのにベクトルの記法を用いるこ

とが多い。重心の位置ベクトルを  $\mathbf{r}_c$  とすれば、

$$\mathbf{r}_c = \frac{\iiint_V \mathbf{r} \rho(x, y, z) dV}{M} \quad (7.33)$$

と書ける。これは単に 3 成分をまとめて表記したものと解釈する以上の内容がある。 $\rho(x, y, z)dV$  は微小体積  $dV$  に含まれる質量である。そして、位置ベクトル  $\mathbf{r}$  はその微小体積まで引いた位置ベクトルであるから、 $\mathbf{r}\rho(x, y, z)dV$  は位置ベクトルに重みを付けたものになり、表記の積分は位置ベクトルの重み付きの和を与える。したがって、この積分を全質量  $M$  で割ると、位置ベクトルの重み付きの平均を与え、なんとなく重心という感触が伝わってくるであろう。

### 例 22

似た形の体積積分を考える。今、領域  $V$  が質量密度  $\rho(x, y, z)$  の分布を持つ物体とする。位置  $(x, y, z)$  にある微小体積  $dV$  までの  $z$  軸からの距離を  $r$  とする。つまり、 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  とする。ここで、次の積分を考える。

$$I = \iiint_V r^2 \rho(x, y, z) dV \quad (7.34)$$

この積分を物体  $V$  の  $z$  軸周りの慣性モーメントと言う。ここで、 $r$  を  $x$  軸からの距離として計算したものは  $x$  軸の回りの慣性モーメントと呼ばれる。同様に  $y$  軸の周りの慣性モーメントも与えることができる。

次に、具体的な例を挙げて、積分計算の持って行きかたを説明する。

### 例 23

まず、質量密度は均一であるとする。また、この物体は  $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$ 、 $-\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}$  および  $-\frac{c}{2} \leq z \leq \frac{c}{2}$  の空間を占めているとする。 $z$  軸の周りの慣性モーメントには  $z$  軸からの距離

の 2 乗  $r^2 = (x^2 + y^2)$  が積分の中に入ってくるので、物体を  $z$  軸に垂直にスライスし、その一つ一つについて慣性モーメントを計算する。スライスの厚さを  $dz$  とする。 $z$  軸上の位置  $z$  を通る薄い板状のスライスについて、今度は  $y$  を一定に保ち幅が  $dy$  である棒状の体積を考える。この棒を長さ  $dx$  の微小体積に分割し、その各々の微小体積  $dV = dx dy dz$  に  $r^2 = (x^2 + y^2)$  を掛けて、 $dx$  について和を取る(図 6.18 参照)。これは積分

$$dzdy \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (x^2 + y^2) \rho dx = \rho dzdy \left[ \frac{1}{3} x^3 + y^2 x \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \rho dzdy \left( \frac{a^3}{12} + ay^2 \right)$$

を与える。次にこれを  $dy$  について和を取ると、

$$dz \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left( \frac{a^3}{12} + ay^2 \right) \rho dy = dz \rho \left[ \frac{a^3 y}{12} + \frac{ay^3}{3} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = dz \rho \left( \frac{a^3 b}{12} + \frac{ab^3}{12} \right) = \rho \frac{ab}{12} (a^2 + b^2) dz$$

となる。つまり、これが位置  $z$  にある厚さ  $dz$  の板状の物体についての  $z$  軸回りの慣性モーメントである。最後に、この板状の物体を  $z$  軸方向に積み上げて、全体の慣性モーメントを得る。

$$\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \frac{ab}{12} (a^2 + b^2) \rho dz = \left[ \frac{\rho ab}{12} (a^2 + b^2) z \right]_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} = \frac{M}{12} (a^2 + b^2)$$

ここで、 $M$  は物体の全質量である。

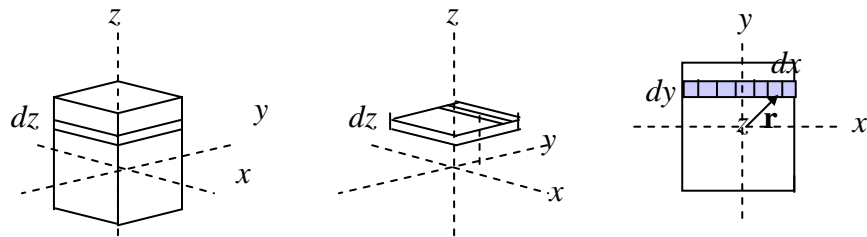


図7.18 慣性モーメントの計算

ところで、空間座標を球座標で与えることで、体積積分を球座標表示で求めることができ、便利なことが多い。球座標を使ったときの微小体積による分割は、各微小体積を  
微小表面積  $\times dr$  で与える。つまり、

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (7.35)$$

を用いる。これにより、関数  $f(r, \theta, \phi)$  の体積積分は

$$I = \iiint_V f(r, \theta, \phi) r^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (7.36)$$

で与えられる。

**例 24** 式 (7.36) で  $f(r, \theta, \varphi) = 1$  とすることで半径  $R$  の球の体積が求まる。球の中心を座標原点におけば、

$$V = \iiint_S \sin \theta d\theta d\varphi \int_0^R r^2 dr = \frac{R^3}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{4\pi R^3}{3}$$

**例 25** 原点に置いた電荷量  $e$  クーロンの荷電粒子（電子や陽子など）が距離  $r$  の位置に作る電場の大きさが  $E = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  で与えられる（クーロンの法則）。電場が分布しているこの

空間にはエネルギー密度が  $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$  で与えられる電場エネルギーが分布していると考えられ

る。 $r = a$  から  $\infty$  までの空間に溜まっている電場エネルギーを求めよ。

電場強度を与える関数が空間に分布しているとして、電気エネルギー密度を原点を中心とする半径  $a$  と半径  $r$  ( $r > a$ ) の二つの球の間の空間  $V$  で体積積分する。

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V f(r, \theta, \phi) r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi \sin \theta d\theta \right) d\phi \int_a^r \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 r^2 dr \\ &= \int_0^{2\pi} 2d\phi \int_a^r \frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 r^2 dr = \int_a^r \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right) \end{aligned}$$

ここで、 $r \rightarrow \infty$  とすれば、無限遠までの空間に蓄えられる電氣的エネルギーの総量が得られ、 $\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a}$  が得られる。さて、ところで、荷電粒子として電子を考え、電子の半径を無

限に小さくすると上記で求めた電場エネルギーのトータルが無限大になる、つまり発散してしまうことに注意されたい。ところで、電子の静止質量と光速をそれぞれ  $m$  および  $c$  とすれば、電子の静止エネルギーは  $mc^2$  である。この静止エネルギーを上記で求めた電場エネルギーと等価であるとして  $a$  を求めると、

$$a = \frac{e^2}{8\pi mc^2}$$

として電子の半径を仮定することができる。実際は  $a_0 = 2a$  として電子の古典半径と呼ぶ。

(Abraham アブラハム) これらの奥深い話は例えば「ランダウ＝リフシッツ 場の古典論、ジャクソン 古典電磁気学」などを参照されたい。

### 7.7 関数行列式 ; Jacobian (ヤコビアン)

今までは、面積分や体積分の計算を行うために微小な面積要素として、 $dS = dx dy$ 、また微小な体積要素として  $dV = dx dy dz$  を考え、これらを積分領域で総和することで積分の値を求めた。これらの微小面積や微小体積の式は座標系を極座標や球座標で表現すると、 $dS = r dr d\theta$  (微小面積) あるいは  $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$  (微小体積) と表せた。2次元カーチン (デカルト) 座標系では  $x$  と  $y$  が独立変数であるが、極座標系では  $r$  と  $\theta$  が独立変数である。両者の間には、 $x = r \cos \theta$  と  $y = r \sin \theta$  の関係があり、両座標系での微分の積の間に、次の関係が有ることが知られている。

$$dx dy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} dr d\theta = r dr d\theta \quad (7.37)$$

ここで、

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} \quad (7.38)$$

を関数行列式、あるいはヤコビアン(Jacobian)、あるいはヤコビの行列式と呼ばれる。極座標の場合、ヤコビアンは  $J = r$  となる。ヤコビアンは二つの座標系で面積を表示したとき、面積が変化しないことを保障する。 $dx dy$  は面積だが、 $dr d\theta$  はこれに対応する面積を与えない。ここに  $r dr d\theta$  として  $r$  を掛けることで対応する面積を与えることになる。

同様の議論は微小体積を  $(x, y, z)$  のデカルト座標系から  $(r, \theta, \phi)$  の球座標系へ変換するときにも現れる。座標変換の式

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad y = r \sin \theta \sin \phi \quad z = r \cos \theta$$

を用いて、

$$dx dy dz = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} dr d\theta d\phi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (7.39)$$

が体積要素表現式の変換である。ここで、ヤコビアンは



$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta \quad (7.40)$$

である。この考え方は他の座標系、たとえば円柱座標系などへも適用できる。